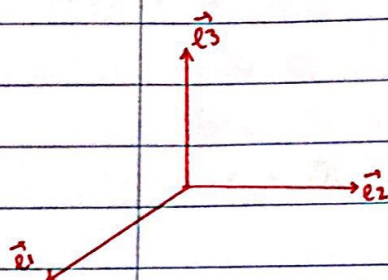


Εσωτερικό γινόμενο συν V_3 (ή V_2)

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \{ \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 \}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$



$\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ τυχαία ορθογ. βάση.

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad a_i = \langle \vec{a}, \vec{e}_i \rangle$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \chi(\vec{a}, \vec{b})$$

Ιδιότητες:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}_2, \vec{b} \rangle$$

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$$

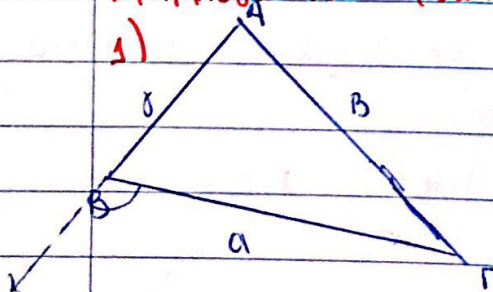
$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

$$\cos \chi(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου:

1)



$$\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \|\vec{A\Gamma}\|^2 = \|\vec{AB} + \vec{B\Gamma}\|^2 =$$

$$\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{B\Gamma}\|^2 + 2\langle \vec{AB}, \vec{B\Gamma} \rangle$$

$$= \delta^2 + \alpha^2 + 2\|\vec{AB}\| \|\vec{B\Gamma}\| \cos \chi(\vec{AB}, \vec{B\Gamma})$$

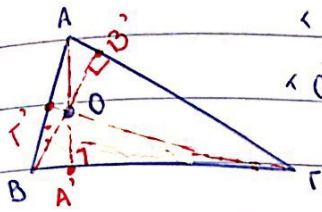
$$= \delta^2 + \alpha^2 + 2\delta\alpha \cos(\pi - B) \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta \cos B$$

Νόμος συν/νου

2) Τα ύψη τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (ορθόκεντρο του τριγώνου)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: θεωρώ τα ύψη AA' και BB' τα οποία τέμνονται στο O



$$\begin{cases} \langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0 \\ \langle \vec{OB}, \vec{OA} \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} - \vec{OB} \rangle = 0 \\ \langle \vec{OB}, \vec{O\Gamma} - \vec{OA} \rangle = 0 \end{cases}$$

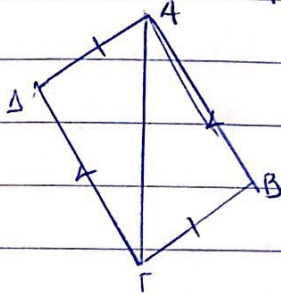
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} \rangle - \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 0 \\ \langle \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \rangle - \langle \vec{OB}, \vec{OA} \rangle = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} \rangle - \langle \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{OA} - \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{BA}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \vec{O\Gamma} \text{ ύψος}$$

3) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παρ/μο.



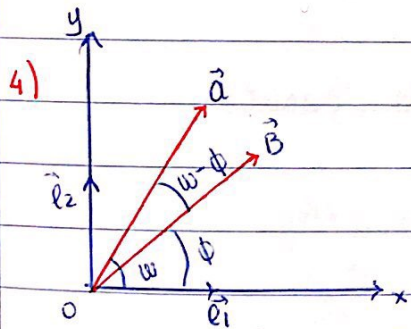
$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$$

$$AB\Gamma\Delta \text{ είναι ρόμβος} \Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AD}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{AB} + \vec{AD}, \vec{AB} - \vec{AD} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{AG}, \vec{AB} \rangle = 0 \Leftrightarrow AG \perp BD$$



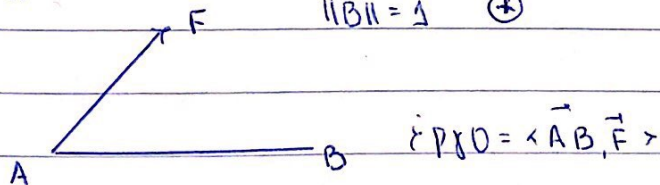
$$\vec{a} = \cos \omega \cdot \vec{e}_1 + \sin \omega \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{b} = \cos \phi \cdot \vec{e}_1 + \sin \phi \cdot \vec{e}_2$$

$$\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle = \cos \omega$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\cos^2 \omega + \sin^2 \omega} = 1$$

$$\|\vec{b}\| = 1 \quad (*)$$

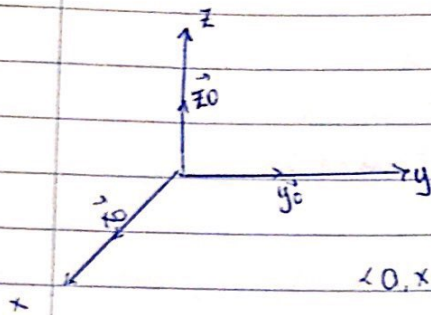


$$\text{proj}_D = \langle \vec{AB}, \vec{F} \rangle$$

$$(*) \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \omega \cdot \cos \phi + \sin \omega \cdot \sin \phi$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \cos(\omega - \phi)$$

Γινόμενα στον V_3 (και μόνο !!!)



Έστω $\{x_0, y_0, z_0\}$ ορθομοναδιαία
 ορισμένη βάση του V_3 και οxyz
 το αντίστοιχο καρτεσιανό σύστημα συν/νων.

$$\vec{a} = a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{x}_0 \rangle = a_1 \Leftrightarrow a_1 = \|\vec{a}\| \cos \kappa(\vec{a}, \vec{x}_0)$$

$$\langle \vec{a}, \vec{y}_0 \rangle = a_2 \Leftrightarrow a_2 = \|\vec{a}\| \cos \kappa(\vec{a}, \vec{y}_0)$$

$$\langle \vec{a}, \vec{z}_0 \rangle = a_3 \Leftrightarrow a_3 = \|\vec{a}\| \cos \kappa(\vec{a}, \vec{z}_0)$$

Εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο διανυσμάτων στον V_3 :

Ορισμός: Κλούμε εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων
 $\vec{a}, \vec{b}$ (με αυτή τη σειρά !!) το διάνυσμα που συμβολίζεται
 με $\vec{a} \times \vec{b}$ και

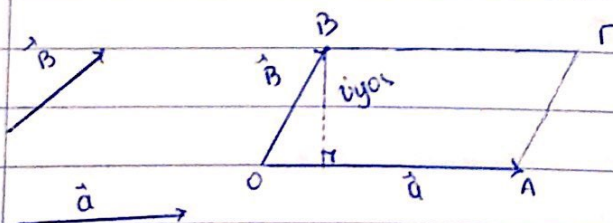
(i) είναι το $\vec{0}$ αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ ενώ αν $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$ το
 $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι το διάνυσμα με

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \kappa(\vec{a}, \vec{b})$$

• Το $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι ορθόγωνιο προς τα $\vec{a}, \vec{b}$, δηλαδή
 $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0 = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle$

• Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ αν είναι βάση τότε είναι ορισμένη
 βάση.

• Τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε. $\Leftrightarrow$
 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$



$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{OA} \\ \vec{b} &= \vec{OB} \\ \omega &= \kappa(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

Το εμβαδόν του παρ/μου OACB είναι ο
 αριθμός $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \omega$

$\|\vec{a} \times \vec{b}\| =$ εμβαδό του παρ/μου με πλευρές $\vec{a}, \vec{b}$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\{ \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \geq 0 \}$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ Lagrange

$$\rightarrow |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ):

Έστω $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ τυχαία ορθομοναδιαία δεξιόστροφη βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\text{Αν } \vec{a} = a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0 \text{ και } \vec{b} = b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + b_3 \vec{z}_0$$

τότε

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \vec{x}_0 - \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \vec{y}_0 + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \vec{z}_0$$

	$\vec{x}_0$	$\vec{y}_0$	$\vec{z}_0$
$\vec{a} \times \vec{b} =$	a_1	a_2	a_3
	b_1	b_2	b_3

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $\vec{a} \times \vec{b} = \gamma_1 \vec{x}_0 + \gamma_2 \vec{y}_0 + \gamma_3 \vec{z}_0$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + a_3 \gamma_3 = 0 \quad \times b_1 (\times b_3)$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_2 + b_3 \gamma_3 = 0 \quad \times (-a_1) (\times (-a_3))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_2 b_1 - a_1 b_2) \gamma_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \gamma_3 = 0 \Leftrightarrow (a_2 b_1 - a_1 b_2) \gamma_2 = (a_1 b_3 - a_3 b_1) \gamma_3 \\ (a_1 b_3 - a_3 b_1) \gamma_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \gamma_2 = 0 \Leftrightarrow (a_1 b_3 - a_3 b_1) \gamma_1 = (a_3 b_2 - a_2 b_3) \gamma_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma_1}{a_3 b_2 - a_2 b_3} = \frac{\gamma_2}{a_1 b_3 - a_3 b_1} = \frac{\gamma_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \Leftrightarrow \text{(δεν ξέρουμε αν είναι } \neq 0 \text{)}$$

$$\gamma_1 = \lambda (a_3 b_2 - a_2 b_3)$$

$$\gamma_2 = \lambda (a_1 b_3 - a_3 b_1)$$

$$\gamma_3 = \lambda (a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \Leftrightarrow \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) -$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \Leftrightarrow$$

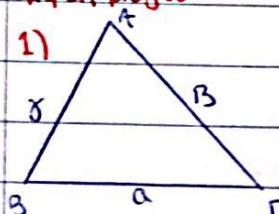
$$\lambda^2 \{ (a_3 b_2 - a_2 b_3)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 \} = \{ \dots \} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Ιδιότητες διανυσμάτων

- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
- $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$
 $\vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2$
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$
 $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

Εφαρμογές:

1)



$$\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GA} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GA}) \times \vec{AB} = \vec{0} \times \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AB} + \vec{BG} \times \vec{AB} + \vec{GA} \times \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{BG} \times \vec{AB} = \vec{AG} \times \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \|\vec{BG} \times \vec{AB}\| = \|\vec{AG} \times \vec{AB}\| \Rightarrow$$

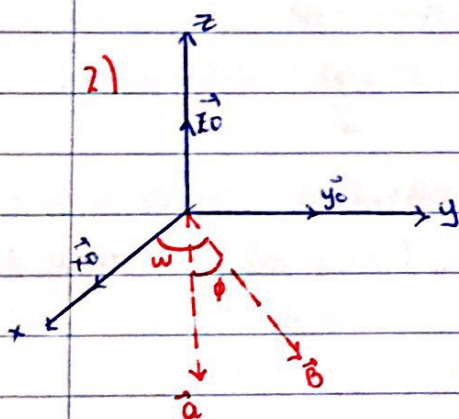
$$\Rightarrow \alpha \sin \hat{B} = \beta \sin \hat{A}$$

$$\alpha \sin \hat{B} = \beta \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{\alpha} = \frac{\sin \hat{B}}{\beta} = \frac{\sin \hat{\Gamma}}{\gamma}$$

Νόμος συνημιτόνων

2)



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & -\vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = 0 \vec{x}_0 - 0 \vec{y}_0 + \dots$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (\cos \omega \sin \phi - \cos \phi \sin \omega)$$

$$= (0, 0, \cos \omega \sin \phi - \cos \phi \sin \omega)$$

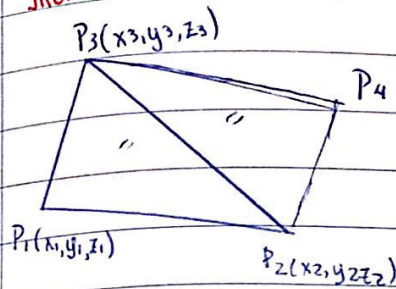
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sin(\phi - \omega)$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0 = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \text{ συγγραμμ. με } \vec{z}_0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \lambda \vec{z}_0, \lambda > 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \vec{z}_0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, \sin(\phi - \omega)) \quad (\sin(\phi - \omega) = \sin \phi \cos \omega - \sin \omega \cos \phi)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ



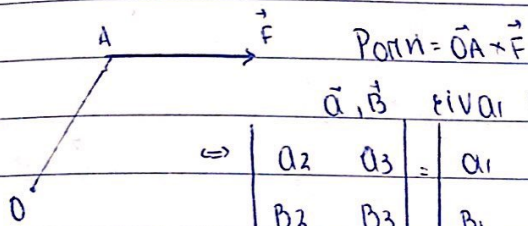
Θεωρώ σημείο P_4 τέτοιο ώστε το ~~$P_1P_2P_4P_3$~~ $P_1P_2P_4P_3$ να είναι παραλλ.
Τότε $\text{Εμβαδό } (P_1P_2P_3) = \frac{1}{2} \text{ Εμβαδό παραλλ.}$
 $= \frac{1}{2} \|\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}\|$
 $\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1}$

$$\vec{OP_1} = x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0 + z_1\vec{z}_0$$

$$\vec{OP_2} = x_2\vec{x}_0 + y_2\vec{y}_0 + z_2\vec{z}_0$$

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{x}_0 + (y_2 - y_1)\vec{y}_0 + (z_2 - z_1)\vec{z}_0$$

$$\vec{P_1P_3} = (x_3 - x_1)\vec{x}_0 + (y_3 - y_1)\vec{y}_0 + (z_3 - z_1)\vec{z}_0$$



$\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_2b_3 = a_3b_2, \quad a_1b_3 = a_3b_1, \quad a_1b_2 = a_2b_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} \Leftrightarrow b_1 = \lambda a_1, \quad b_3 = \lambda a_3, \quad b_2 = \lambda a_2$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$$

ΜΙΚΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΟ V_3 :

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (με αυτή τη σειρά!!!) τον αριθμό

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Θεωρώ σημεία O, A, B, C τέτοια ώστε $\vec{OA} = \vec{a}$

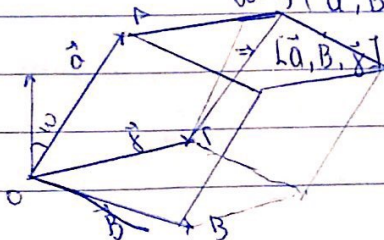
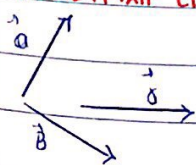
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \|\vec{a}\| \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cos \omega$$

$$\vec{OB} = \vec{b}$$

$$\vec{OC} = \vec{c}$$

$$\omega = \angle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$$

$$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \|\vec{a}\| \cos \omega = h \cdot v$$



$|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = \text{όγκος του παραλληλεπίπεδου με ακμές τα } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Πόρισμα: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι γ.ε. $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}] = 0$